Notations indicielles

Voici quelques exemples détaillés de notation indicielle, en supposant travailler dans un espace à trois dimensions.

Définition d'un vecteur, par exemple le vecteur position d'un point de l'espace :

$$\overrightarrow{OM} = x_i\,\overrightarrow{E_i} = \sum_{i=1}^{3} x_i\,\overrightarrow{E_i} = x_1\,\overrightarrow{E_1} + x_2\,\overrightarrow{E_2} + x_3\,\overrightarrow{E_3}$$

Produit scalaire de deux vecteurs $\vec{A} = a_i\,\overrightarrow{E_i}$ et $\vec{B} = b_i\,\overrightarrow{E_i}$

$$\vec{A}\vec{B} = a_i\,\overrightarrow{E_i}.b_j\,\overrightarrow{E_j} = \left(\sum_{i=1}^{3} a_i\,\overrightarrow{E_i}\right).\left(\sum_{j=1}^{3} b_j\,\overrightarrow{E_j}\right) = \sum_{i=1}^{3}\left[\sum_{j=1}^{3}\left(a_i\,\overrightarrow{E_i}.b_j\,\overrightarrow{E_j}\right)\right]$$

$$\vec{A}\vec{B} = \sum_{i=1}^{3}\left(a_i\,\overrightarrow{E_i}.b_1\,\overrightarrow{E_1} + a_i\,\overrightarrow{E_i}.b_2\,\overrightarrow{E_2} + a_i\,\overrightarrow{E_i}.b_3\,\overrightarrow{E_3}\right)$$

$$\vec{A}\vec{B} = a_1\,\overrightarrow{E_1}.b_1\,\overrightarrow{E_1} + a_1\,\overrightarrow{E_1}.b_2\,\overrightarrow{E_2} + a_1\,\overrightarrow{E_1}.b_3\,\overrightarrow{E_3} + a_2\,\overrightarrow{E_2}.b_1\,\overrightarrow{E_1} + a_2\,\overrightarrow{E_2}.b_2\,\overrightarrow{E_2} + a_2\,\overrightarrow{E_2}.b_3\,\overrightarrow{E_3} + a_3\,\overrightarrow{E_3}.b_1\,\overrightarrow{E_1} + a_3\,\overrightarrow{E_3}.b_2\,\overrightarrow{E_2} + a_3\,\overrightarrow{E_3}.b_3\,\overrightarrow{E_3}$$

Produit scalaire de deux vecteurs avec utilisation du symbole de Kronecker dans le cas d'une base orthonormée :

$$\vec{A}\vec{B} = a_i\,\overrightarrow{E_i}.b_j\,\overrightarrow{E_j} = \left(\sum_{i=1}^{3} a_i\,\overrightarrow{E_i}\right).\left(\sum_{j=1}^{3} b_j\,\overrightarrow{E_j}\right) = \sum_{i=1}^{3}\left[\sum_{j=1}^{3}\left(a_i\,\overrightarrow{E_i}.b_j\,\overrightarrow{E_j}\right)\right] = \sum_{i=1}^{3}\left[\sum_{j=1}^{3}\left(a_i.b_j.\delta_{ij}\right)\right]$$

$$\vec{A}\vec{B} = \sum_{i=1}^{3}\left(a_i.b_1.\delta_{i1} + a_i.b_2.\delta_{i2} + a_i.b_3.\delta_{i3}\right)$$

$$\vec{A}\vec{B} = a_1.b_1.\delta_{11} + a_1.b_2.\delta_{12} + a_1.b_3.\delta_{13} + a_2.b_1.\delta_{21} + a_2.b_2.\delta_{22} + a_2.b_3.\delta_{23} + a_3.b_1.\delta_{31} + a_{3i}.b_2.\delta_{32} + a_3.b_3.\delta_{33}$$

$$\vec{A}\vec{B} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$$

Divergence d'un vecteur, par exemple la divergence du vecteur vitesse $\vec{V} = v_i\,\overrightarrow{E_i}$ $\;avec\; v_i = v_i\left(x_j\right)$ d'un point de l'espace :

$$div\left(\vec{V}\right) = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

Gradient d'une fonction scalaire, par exemple la fonction pression en un point de l'espace $p = p\left(x_i\right)$:

$$\overrightarrow{grad(p)} = \frac{\partial p}{\partial x_i}\overrightarrow{E_i} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial p}{\partial x_i}\overrightarrow{E_i} = \frac{\partial p}{\partial x_1}\overrightarrow{E_1} + \frac{\partial p}{\partial x_2}\overrightarrow{E_2} + \frac{\partial p}{\partial x_3}\overrightarrow{E_3}$$

Démonstration indicielle d'une formule, par exemple la divergence d'un vecteur multiplié par un scalaire :

$$div\left(p.\vec{V}\right) = \frac{\partial\left(p\,v_i\right)}{\partial x_i} = p\,\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + v_i\,\frac{\partial p}{\partial x_i} = p\,div\left(\vec{V}\right) + \vec{V}.\overrightarrow{grad(p)}$$

Cette démonstration est à comparer avec une démonstration n'utilisant pas la notation indicielle :

$$div\left(p.\vec{V}\right)=\frac{\partial\left(p\,v_1\right)}{\partial x_1}+\frac{\partial\left(p\,v_2\right)}{\partial x_2}+\frac{\partial\left(p\,v_3\right)}{\partial x_3}=p\,\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+v_1\,\frac{\partial p}{\partial x_1}+p\,\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+v_2\,\frac{\partial p}{\partial x_2}+p\,\frac{\partial v_3}{\partial x_3}+v_3\,\frac{\partial p}{\partial x_3}$$

$$div\left(p.\vec{V}\right)=p\,\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+p\,\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+p\,\frac{\partial v_3}{\partial x_3}+v_1\,\frac{\partial p}{\partial x_1}+v_2\,\frac{\partial p}{\partial x_2}+v_3\,\frac{\partial p}{\partial x_3}$$

$$div\left(p.\vec{V}\right)=p\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)+v_1\,\frac{\partial p}{\partial x_1}+v_2\,\frac{\partial p}{\partial x_2}+v_3\,\frac{\partial p}{\partial x_3}=p\,div\left(\vec{V}\right)+\vec{V}\,.\overrightarrow{grad\left(p\right)}$$

Gradient d’une fonction vectorielle, par exemple le tenseur gradient d’un vecteur déplacement $\vec{U}=u_i\,\vec{E_i}\;\;avec\;u_i=u_i\left(x_j\right)$ d’un point de l’espace :

$$\overline{\overline{grad\left(\vec{U}\right)}}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\,\vec{E_i}\otimes\vec{E_j}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\,\vec{E_i}\otimes\vec{E_j}$$

$$\overline{\overline{grad\left(\vec{U}\right)}}=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1}\,\vec{E_i}\otimes\vec{E_1}+\frac{\partial u_i}{\partial x_2}\,\vec{E_i}\otimes\vec{E_2}+\frac{\partial u_i}{\partial x_3}\,\vec{E_i}\otimes\vec{E_3}\right)$$

$$\begin{aligned}\overline{\overline{grad\left(\vec{U}\right)}}=&\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\,\vec{E_1}\otimes\vec{E_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\,\vec{E_1}\otimes\vec{E_2}+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\,\vec{E_1}\otimes\vec{E_3}\\&+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\,\vec{E_2}\otimes\vec{E_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\,\vec{E_2}\otimes\vec{E_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\,\vec{E_2}\otimes\vec{E_3}\\&+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\,\vec{E_3}\otimes\vec{E_1}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\,\vec{E_3}\otimes\vec{E_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\,\vec{E_3}\otimes\vec{E_3}\end{aligned}$$

Mais sur cet exemple, il est plus simple d’utiliser la notation matricielle :

$$\overline{\overline{grad\left(\vec{U}\right)}}=\begin{pmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}&\frac{\partial u_1}{\partial x_2}&\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\\\frac{\partial u_2}{\partial x_1}&\frac{\partial u_2}{\partial x_2}&\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\\\frac{\partial u_3}{\partial x_1}&\frac{\partial u_3}{\partial x_2}&\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\end{pmatrix}_{\left(\vec{E_1},\vec{E_2},\vec{E_3}\right)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}&\frac{\partial u_1}{\partial x_2}&\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\\\frac{\partial u_2}{\partial x_1}&\frac{\partial u_2}{\partial x_2}&\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\\\frac{\partial u_3}{\partial x_1}&\frac{\partial u_3}{\partial x_2}&\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\end{pmatrix}_{\left(\vec{E_i}\right)}$$

Produit scalaire de deux tenseurs, par exemple produit scalaire du tenseur des contraintes $\overline{\overline{\sigma(M)}}$ avec le tenseur des déformations $\overline{\overline{\varepsilon(M)}}$:

$$\overline{\overline{\sigma(M)}}\underline{\underline{\otimes}}\overline{\overline{\varepsilon(M)}}=\sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}$$

$$\overline{\overline{\sigma(M)}}\underline{\underline{\otimes}}\overline{\overline{\varepsilon(M)}}=\sigma_{11}\varepsilon_{11}+\sigma_{12}\varepsilon_{12}+\sigma_{13}\varepsilon_{13}+\sigma_{21}\varepsilon_{21}+\sigma_{22}\varepsilon_{22}+\sigma_{23}\varepsilon_{23}+\sigma_{31}\varepsilon_{31}+\sigma_{32}\varepsilon_{32}+\sigma_{33}\varepsilon_{33}$$

Produit contracté de deux tenseurs, par exemple la traduction de la loi de comportement linéaire entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations $\overline{\overline{\sigma}}=\overline{\overline{\overline{\overline{A}}}}\otimes\overline{\overline{\varepsilon}}$:

$$\overline{\overline{\sigma}}=\sigma_{ij}\,\vec{E_i}\otimes\vec{E_j}\qquad\overline{\overline{\varepsilon}}=\varepsilon_{ij}\,\vec{E_i}\otimes\vec{E_j}\qquad\overline{\overline{\overline{\overline{A}}}}=A_{ijkl}\,\vec{E_i}\otimes\vec{E_j}\otimes\vec{E_k}\otimes\vec{E_l}\qquad\sigma_{ij}=A_{ijkl}\,.\varepsilon_{kl}=\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}A_{ijkl}\,.\varepsilon_{kl}$$

$$\sigma_{ij}=A_{ij11}.\varepsilon_{11}+A_{ij12}.\varepsilon_{12}+A_{ij13}.\varepsilon_{13}+A_{ij21}.\varepsilon_{21}+A_{ij22}.\varepsilon_{22}+A_{ij23}.\varepsilon_{23}+A_{ij31}.\varepsilon_{31}+A_{ij32}.\varepsilon_{32}+A_{ij33}.\varepsilon_{33}$$

Dans cet exemple, les indices i et j sont des indices parlants et ils peuvent prendre n’importe quelle valeur entre 1 et 3. Donc en définitive on retrouve 9 équations identiques à la dernière écriture. On peut réaliser l’importance de travailler sur une formulation contractée.