Anisotropie

Etude de la symétrie plane

L'anisotropie

D'après le cours de Mécanique des Milieux Continus, la loi de comportement d'un milieu continu homogène en transformation continue, infinitésimale, monotherme réversible, infiniment lente à loi de comportement élastique linéaire se traduit par la relation :

$$\sigma_{ij} = K_{ijkl}\, \varepsilon_{kl}$$

On fait ainsi apparaître un tenseur de comportement du quatrième ordre $\mathbb{K}$ qui se nomme le tenseur de raideur ou de rigidité. Compte tenu de la symétrie des tenseurs contrainte et déformation, ce tenseur est constitué de 36 termes indépendants.

D'autre part, le travail de déformation étant une fonction d'état, sa différentielle doit être totale exacte :

$$d\,W_{def} = -P_{int}\, dt = \int_D \overline{\overline{\sigma}} \otimes \left(\mathbb{D}\, dt\right) dv = \int_D \overline{\overline{\sigma}} \otimes \overline{\overline{d\varepsilon}}\, dv = \int_D \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij}\, dv$$

Ce qui implique que les conditions d'intégrabilité de Cauchy doivent être vérifiées :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} \qquad \Leftrightarrow \qquad K_{ijkl} = K_{klij}$$

Ces relations étant au nombre de 15, le tenseur d'élasticité est déterminé par 21 coefficients indépendants. Ce tenseur étant d'ordre 4, la représentation est très difficile en dehors de la notation indicielle. Afin de faciliter cette représentation, on effectue un changement d'espace vectoriel de représentation. On passe donc de l'espace vectoriel classique de dimension trois dans lequel les tenseurs contraintes et déformation sont représentés par des matrices carrée 3*3 à un espace vectoriel de dimension 6 dans lequel ces tenseurs, compte tenu de leur symétrie, peuvent être représentés par des vecteurs.

Les lois de transformation sont les suivantes :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} = \sigma_{32} \\ \sigma_{31} = \sigma_{13} \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} \end{pmatrix} \qquad \overline{\overline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} = 2\varepsilon_{32} \\ \gamma_{31} = 2\varepsilon_{31} = 2\varepsilon_{13} \\ \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{21} \end{pmatrix}$$

Il est à noter que ce ne sont pas les mêmes lois qui sont utilisées car dans les composantes du nouveau vecteur représentant les déformations on fait apparaître les distorsions angulaires. Dans ce nouvel espace vectoriel, la représentation de la loi de comportement prend une forme particulière :

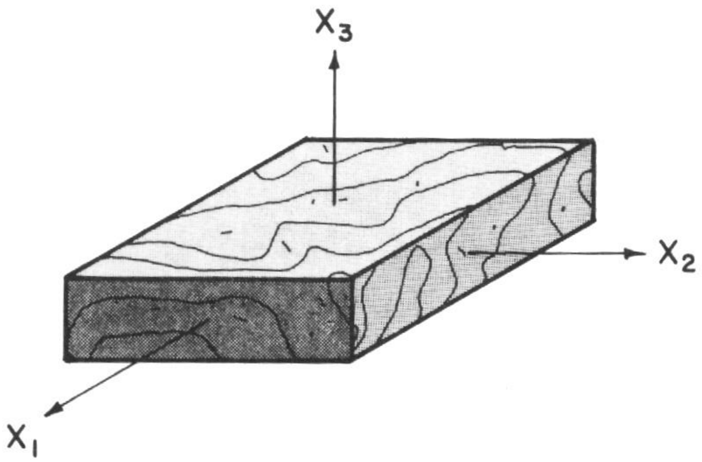
$$\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{K \varepsilon}} \rightarrow \hat{\sigma} = \hat{C}\hat{\varepsilon}$$

On obtient en effet une forme matricielle simple :

$$\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{31}\\ \sigma_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36}\\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46}\\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56}\\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{31}\\ \gamma_{12}\end{pmatrix}$$

Les conditions d'intégrabilité du travail de déformation nous donnent les 15 relations suivantes pour les 36 coefficients :

$$\begin{array}{lllll} c_{12}=c_{21} & c_{14}=2c_{41} & c_{24}=2c_{42} & c_{34}=2c_{43} & c_{45}=c_{54}\\ c_{13}=c_{31} & c_{15}=2c_{51} & c_{25}=2c_{52} & c_{35}=2c_{53} & c_{46}=c_{64}\\ c_{23}=c_{32} & c_{16}=2c_{61} & c_{26}=2c_{62} & c_{36}=2c_{63} & c_{56}=c_{65}\end{array}$$



La structure de la matrice de comportement devient alors :

$$(c_{ij})=\begin{pmatrix} X_{ij} & \vdots & 2\,{}^{T}Z_{ij}\\ \cdots & \cdots\vdots\cdots & \cdots\\ Z_{ij} & \vdots & Y_{ij}\end{pmatrix}$$

Les sous-matrices *X*, *Y* et *Z* étant des matrices (3,3) et les matrices *X* et *Y* étant symétriques on a bien 21 coefficients indépendants.

Cette structure matricielle concerne donc les matériaux ne possédant aucun plan de symétrie matérielle c'est à dire des matériaux totalement anisotrope.

Symétrie matérielle

Le tenseur d'élasticité est donc dans le cas le plus général déterminé le plus souvent par 21 coefficients indépendants. Il est donc nécessaire de définir les expériences qui permettront d'évaluer ces différents termes. Et il est bien question d'évaluation car il faut réaliser que de nombreuses hypothèses ne seront en fait qu'approximativement vérifiées (transformation monotherme réversible infiniment lente par exemple). Ainsi les valeurs données par les résultats d'essai ne sont que des valeurs statistiques avec une dispersion directement fonction des conditions réelles d'expérience. D'autre part il faut aussi concevoir que la mise en œuvre d'une telle loi risque de poser problème. En effet la loi définie est directement fonction du repère utilisé. Il est donc nécessaire de faire les calculs en référence à ce repère. On est ainsi amené à effectuer des changements de base. La difficulté provient du fait que la loi de comportement est traduite par un tenseur d'ordre 4 et que les formules de changement de base sont les suivantes :

$$(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)\leftrightarrow(\vec{E}_1,\vec{E}_2,\vec{E}_3) \qquad \vec{e}_i=a_i^J\,\vec{E}_J \quad \vec{E}_I=b_I^j\,\vec{e}_j \quad \text{avec} \quad a_i^J\,b_J^k=\delta_i^k$$

$$T=t^{ijkl}\,\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j\otimes\vec{e}_k\otimes\vec{e}_l=T^{IJKL}\,\vec{E}_I\otimes\vec{E}_J\otimes\vec{E}_K\otimes\vec{E}_L$$

$$t^{ijkl}=b_I^i\,b_J^j\,b_K^k\,b_L^l\,T^{IJKL}$$

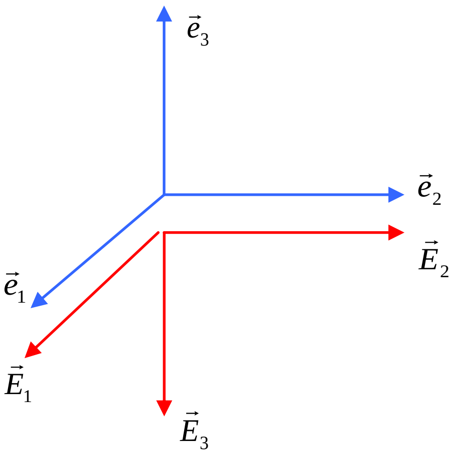
$$T^{IJKL}=a_i^I\,a_j^J\,a_k^K\,a_l^L\,t^{ijkl}$$

L'anisotropie se traduit par exemple par le fait que la réponse à une pression hydrostatique $\left(\overline{\overline{\sigma}}=-p\,\overline{\overline{I}}\right)$ n'engendre pas une dilatation pure ($\varepsilon_{11}\neq\varepsilon_{22}\neq\varepsilon_{33}$ et les distorsions $\gamma_{12},\gamma_{23},\gamma_{31}$ ne sont pas nulles).

Dans de nombreux cas, le matériau présente, avec une assez bonne approximation, des plans de symétrie. Il s'ensuit que la relation traduisant le comportement de ce matériau doit être invariante vis à vis de ces symétries. Dans les faits cela va impliquer des relations supplémentaires entre les coefficients de la loi de comportement.

Symétrie plane

Supposons que le plan $\left(\vec{E}_1,\vec{E}_2\right)$ soit un plan de symétrie matérielle.



Dans ce cas la loi de comportement doit être invariante par le changement de base défini par les matrices :

$$b=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=a$$

On a alors avec ces matrices :

$$t^{ijkl}=b_I^i\,b_J^j\,b_K^k\,b_L^l\,T^{IJKL}=T^{IJKL}$$

$$T^{IJKL}=a_i^I\,a_j^J\,a_k^K\,a_l^L\,t^{ijkl}=t^{ijkl}$$

Pour cela, il faut avoir les relations suivantes :

$$c_{14}=c_{24}=c_{34}=c_{64}=0$$

$$c_{15}=c_{25}=c_{35}=c_{65}=0$$

L'expression des relations contraintes – déformations devient alors :

$$\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\\sigma_{22}\\\sigma_{33}\\\sigma_{23}\\\sigma_{31}\\\sigma_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}&0&0&c_{16}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}&0&0&c_{26}\\c_{31}&c_{32}&c_{33}&0&0&c_{36}\\0&0&0&c_{44}&c_{45}&0\\0&0&0&c_{54}&c_{55}&0\\c_{61}&c_{62}&c_{63}&0&0&c_{66}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_{11}\\\varepsilon_{22}\\\varepsilon_{33}\\\gamma_{23}\\\gamma_{31}\\\gamma_{12}\end{pmatrix}$$

Voici un début de démonstration de ce résultat.

Nous avons donc deux bases d'étude $\left(\vec{e_i}\right)$ et $\left(\vec{E_i}\right)$.
Dans la première base nous pouvons écrire :

$$\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{31}\\ \sigma_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}&c_{14}&c_{15}&c_{16}\\ c_{21}&c_{22}&c_{23}&c_{24}&c_{25}&c_{26}\\ c_{31}&c_{32}&c_{33}&c_{34}&c_{35}&c_{36}\\ c_{41}&c_{42}&c_{43}&c_{44}&c_{45}&c_{46}\\ c_{51}&c_{52}&c_{53}&c_{54}&c_{55}&c_{56}\\ c_{61}&c_{62}&c_{63}&c_{64}&c_{65}&c_{66}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{31}\\ \gamma_{12}\end{pmatrix}$$

Dans la deuxième base nous pouvons écrire :

$$\begin{pmatrix}\sigma'_{11}\\ \sigma'_{22}\\ \sigma'_{33}\\ \sigma'_{23}\\ \sigma'_{31}\\ \sigma'_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c'_{11}&c'_{12}&c'_{13}&c'_{14}&c'_{15}&c'_{16}\\ c'_{21}&c'_{22}&c'_{23}&c'_{24}&c'_{25}&c'_{26}\\ c'_{31}&c'_{32}&c'_{33}&c'_{34}&c'_{35}&c'_{36}\\ c'_{41}&c'_{42}&c'_{43}&c'_{44}&c'_{45}&c'_{46}\\ c'_{51}&c'_{52}&c'_{53}&c'_{54}&c'_{55}&c'_{56}\\ c'_{61}&c'_{62}&c'_{63}&c'_{64}&c'_{65}&c'_{66}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon'_{11}\\ \varepsilon'_{22}\\ \varepsilon'_{33}\\ \gamma'_{23}\\ \gamma'_{31}\\ \gamma'_{12}\end{pmatrix}$$

Mais en fait, en considérant que le comportement est inchangé par changement de base cela nous donne :

$$\begin{pmatrix}\sigma'_{11}\\ \sigma'_{22}\\ \sigma'_{33}\\ \sigma'_{23}\\ \sigma'_{31}\\ \sigma'_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}&c_{14}&c_{15}&c_{16}\\ c_{21}&c_{22}&c_{23}&c_{24}&c_{25}&c_{26}\\ c_{31}&c_{32}&c_{33}&c_{34}&c_{35}&c_{36}\\ c_{41}&c_{42}&c_{43}&c_{44}&c_{45}&c_{46}\\ c_{51}&c_{52}&c_{53}&c_{54}&c_{55}&c_{56}\\ c_{61}&c_{62}&c_{63}&c_{64}&c_{65}&c_{66}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon'_{11}\\ \varepsilon'_{22}\\ \varepsilon'_{33}\\ \gamma'_{23}\\ \gamma'_{31}\\ \gamma'_{12}\end{pmatrix}$$

Il nous faut maintenant traduire les relations de changement de base concernant les représentants de l'état de contrainte et de l'état de déformation. Pour cela on pourrait utiliser les relations de changement de base :

$$\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)\leftrightarrow\left(\vec{E}_1,\vec{E}_2,\vec{E}_3\right) \quad \vec{e}_i=a_i^J\,\vec{E}_J \quad \vec{E}_I=b_I^j\,\vec{e}_j \quad \text{avec} \quad a_i^J\,b_J^k=\delta_i^k$$

Mais on va plutôt utiliser une relation permettant de un terme courant d'un tenseur par exemple du tenseur contrainte :

$$\sigma_{ij}=\overrightarrow{e_i}.\overline{\overline{\sigma}}\,\overrightarrow{e_j}$$

Ce qui nous donne entre autre:

$$\sigma_{11}=\overrightarrow{e_1}.\overline{\overline{\sigma}}\,\overrightarrow{e_1}$$
$$\sigma_{12}=\overrightarrow{e_1}.\overline{\overline{\sigma}}\,\overrightarrow{e_2}$$
$$\sigma_{13}=\overrightarrow{e_1}.\overline{\overline{\sigma}}\,\overrightarrow{e_3}$$

Dans la nouvelle base on peut donc écrire :

$$\sigma'_{ij}=\overrightarrow{E_i}.\overline{\overline{\sigma}}\,\overrightarrow{E_j}$$

Avec le changement de base :

$\overrightarrow{E_1} = \overrightarrow{e_1}$; $\overrightarrow{E_2} = \overrightarrow{e_2}$; $\overrightarrow{E_3} = -\overrightarrow{e_3}$

On obtient :

$$\sigma'_{11} = \overrightarrow{E_1}.\overline{\overline{\sigma}}\,\overrightarrow{E_1} = \overrightarrow{e_1}.\overline{\overline{\sigma}}\,\overrightarrow{e_1} = \sigma_{11}$$
$$\sigma'_{12} = \overrightarrow{E_1}.\overline{\overline{\sigma}}\,\overrightarrow{E_2} = \overrightarrow{e_1}.\overline{\overline{\sigma}}\,\overrightarrow{e_2} = \sigma_{12}$$
$$\sigma'_{13} = \overrightarrow{E_1}.\overline{\overline{\sigma}}\,\overrightarrow{E_3} = \overrightarrow{e_1}.\overline{\overline{\sigma}}\,(-\overrightarrow{e_3}) = -\sigma_{13}$$

En définitive, la règle de changement de base se traduit par :

$$\begin{pmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{33} \\ \sigma'_{23} \\ \sigma'_{31} \\ \sigma'_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ -\sigma_{23} \\ -\sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{33} \\ \gamma'_{23} \\ \gamma'_{31} \\ \gamma'_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ -\gamma_{23} \\ -\gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne dans la nouvelle base :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ -\sigma_{23} \\ -\sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ -\gamma_{23} \\ -\gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}$$

En développant simplement la première ligne on obtient :

$$\sigma_{11} = c_{11}\,\varepsilon_{11} + c_{12}\,\varepsilon_{22} + c_{13}\,\varepsilon_{33} - c_{14}\,\gamma_{23} - c_{15}\,\gamma_{31} + c_{16}\,\gamma_{12}$$

Mais en développant la première ligne dans l’ancienne base on obtient :

$$\sigma_{11} = c_{11}\,\varepsilon_{11} + c_{12}\,\varepsilon_{22} + c_{13}\,\varepsilon_{33} + c_{14}\,\gamma_{23} + c_{15}\,\gamma_{31} + c_{16}\,\gamma_{12}$$

Pour que ces deux relations puissent être vérifiées quel que soit l’état de déformation, il est nécessaire que les coefficients c_{14} et c_{15} soient nuls. Et on fait le même raisonnement en développant d’autres lignes pour démontrer que d’autres termes sont nuls et obtenir la forme finale du tenseur de comportement.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{54} & c_{55} & 0 \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}$$
